

FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
STUDIENKOLLEG

Fach Mathematik	<u>Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Hochschuleignung</u> <u>Musterklausur</u>	W
--------------------	---	----------

Von den vier Aufgabenvorschlägen sind **drei** vollständig zu bearbeiten. **Begründen** Sie Ihre Antworten durch Rechnungen oder kurze Texte. Zeichnungen bitte vollständig beschriften.

Bearbeitungszeit : 180 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig)

Vorschlag 1: (Flächenberechnung, Extremwert)

Gegeben sei die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a^2}(4x^2 + x + 3)$; $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

- a) Zeigen Sie, dass die Funktionen f_a positiv sind. (Hinweis: Untersuchen Sie f_a auf Nullstellen oder bestimmen Sie die Scheitelpunktsform von f_a)
- b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche $A(a)$ unter dem Graphen von f_a über dem Intervall $[0;a]$ in Abhängigkeit von a .
- c) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen und der zu berechnenden Fläche für $a = 2$ auf Millimeterpapier an. Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle an den Stellen $0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; 3$.
Maßstab: x-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 4 cm**; y-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 1 cm**.
- d) Berechnen Sie die Flächeninhalt für $a = 2$.
- e) Für welchen Wert von $a > 0$ wird der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f_a über dem Intervall $[0;a]$ minimal?
- f) Für welche $a > 0$ ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f_a über dem Intervall $[0;a]$ gleich 9?
- g) In welchem Verhältnis teilt der Graph von f_2 das Rechteck aus den Punkten $(0|0)$, $(3|0)$, $(3|f_2(3))$ und $(0|f_2(3))$. Zeichnen Sie das Rechteck in die Zeichnung aus Teil c) ein und benennen Sie die Teilflächen.
- h) Für welches $a > 0$ ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f_2 über dem Intervall $[0;a]$ gleich $\frac{9}{8}a^2$?

Vorschlag 2: (Rekonstruktion einer Funktionsgleichung , Fläche zwischen zwei Graphen)

- Eine ganzrationale Funktion f vierten Grades, die durch den Ursprung geht, besitzt den Hochpunkt $(2 | 64)$ und an der Stelle $x = -1$ die Tangente $t(x) = -12x - 38$. Wie lautet die Funktionsgleichung von f ? (Lösung zur Kontrolle: $f(x) = 2x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 48x$)
- Für welchen Wert von a schneidet die Funktion $g(x) = 10x^2 + ax$ die Funktion f an der Stelle $x = 3$. Geben Sie **alle** Schnittpunkte an.
- Berechnen sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f und g .

Vorschlag 3: (Untersuchung einer gebrochen-rationalen Funktion)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x+1)^2}$

- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich;
- Untersuchen Sie f auf Nullstellen;
- Untersuchen Sie f auf Symmetrie;
- Bestimmen Sie das Verhalten von f bei den Definitionslücken mit Hilfe von Grenzwerten und geben Sie gegebenenfalls senkrechte Asymptoten an;
- Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$ (weitere Asymptote);
- Untersuchen Sie die Funktion f auf Extremal- und Wendepunkte;
- Legen Sie eine Wertetabelle für $x \in \{-7; -3; 0; 7\}$ an.
- Zeichnen Sie die Asymptoten und den Graphen von f mit Hilfe der Ergebnisse aus a) bis g) auf Millimeterpapier. Beschriften Sie die Zeichnung vollständig.
Maßstab: x-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 1 cm** , y-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 2 cm**.

Vorschlag 4: (Analytische Geometrie)

Gegeben seien zwei Geraden $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$.

- Zeigen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 in einer Ebene E_1 liegen, indem Sie nachweisen, dass sie sich schneiden. Geben Sie den Schnittpunkt an.
- Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene E_1 an.
- Berechnen Sie die Spurgerade von E_1 in der xz -Ebene.

d) Geben Sie eine Normalengleichung der Ebene $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$ an.

- Welche Lage nehmen die Ebenen E_1 und E_2 zueinander ein? Berechnen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

Gegeben sei weiter eine dritte Gerade g_3 , die durch die Punkte $P(-2 | 11 | 5)$ und $Q(6 | 11 | 7)$ geht:

- Bestimmen Sie die Spurpunkte von g_3 in der xy -Ebene und der xz -Ebene.
- Welche Lage nimmt die Gerade g_3 zur Ebene E_2 ein? Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt und Schnittwinkel bzw. den Abstand.